ANALITIESE MEETKUNDE.

Die volgende formules word gebruik :

Gradiënt van 'n lyn : $M = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ $\left(\frac{\textit{verandering in } y}{\textit{verandering in } x}\right)$

Afstand tussen twee punte : $AB = \sqrt{(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)}$

Vergelyking van 'n lyn (Die gradiënt is bekend en nog 'n punt op die lyn) :

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

of

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

of

$$y = mx + c$$

Middelpunt van 'n lynstuk : $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Twee lyne is loodreg op mekaar as $M_1 \times M_2 = -1$.

Twee lyne is ewewydig as $M_1 = M_2$.

1. **Bewys twee lyne ewewydig :**

   Bewys die gradiënte gelyk→ $M_1 = M_2$.

2. **Bewys twee lyne loodreg op mekaar of 'n hoek gelyk aan 90° :**

   Bewys die produk van die gradiënte gelyk aan -1 → $M_1 \times M_2 = -1$.

3. **Bewys 'n driehoek gelykbenig :**

   Bereken die lengtes van die sye → *Afstandsformule.*

4. **Bepaal die vergelyking van 'n lyn deur twee punte :**

   Bepaal eers die gradiënt en gebruik dan een van die volgende formules :

$y - y_1 = m(x - x_1)$ *(Die koördinate van enige van die twee punte kan as $x_1; y_1$ gebruik word.)*

of

$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$ *($x_1; y_1$ kan weer die koördinate van enige van die twee punte wees. Vereenvoudig dan verder.)*

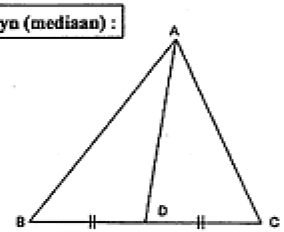
of

$y = mx + c$ *(Jy het reeds die gradiënt en om c te bereken vervang x en y met die koördinate van enige van die twee punte.)*

Dikwels word slegs een punt op 'n lyn gegee, maar dan word gegee dat die lyn ewewydig is aan 'n ander lyn of loodreg is op 'n ander lyn. Bereken dan eers die gradiënt van die ander lyn om die gradiënt van die gevraagde lyn te kry. Gebruik dan enige van die metodes hierbo verduidelik.
Onthou, as 'n skets nie gegee word nie, maak altyd 'n skets van die gegewe punte. Dit maak die bewerkings makliker.

5. **Bepaal die vergelyking van die swaartelyn (mediaan) :**

'n Swaartelyn gaan vanaf 'n hoekpunt van die driehoek na die middelpunt van die teenoorstaande sy. Bereken dus eers die middelpunt van die teenoorstaande sy. Dan is twee punte bekend en volg dan enige van die metodes in 4 hierbo.

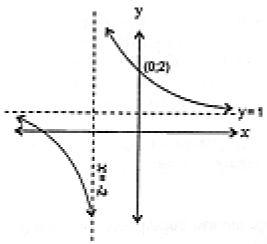


AD is swaartelyn

2. Bereken die vergelykings van die grafieke :

Voorbeeld 9:

$y = \frac{a}{x+p} + q$. Vind die waardes van a, p *en* q.



Vertikale asimptoot is waar $x + p = 0$

$\therefore -2 + p = 0$

$\underline{\therefore p = 2}$

Horisontale asimptoot : $y = 1$

$\underline{\therefore q = 1}$

Om a te bereken, vervang p en q in vergelyking en vervang $(x;y)$ *met* $(0;2.)$.

$\therefore 2 = \frac{a}{0+2} + 1$

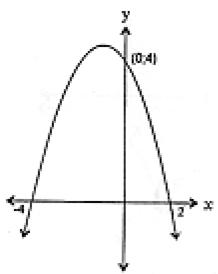
$\therefore 2(2) = a + 2$ (*Maal met* 2.)

$\therefore 4 - 2 = a$

$\underline{\therefore a = 2}$

Voorbeeld 10.

$y = ax^2 + bx + c$. Vind die waardes van $a, b\ c$.



Wortels word gegee, gebruik dus die vergelyking
$y = a(x - \text{1ste wortel})(x - \text{2de wortel})$

$\therefore y = a(x-2)(x-(-4))$

$\therefore y = a(x-2)(x+4)$ (*Stel nou* $(0;4)$ *in* $\therefore x = 0; y = 4.$)

$\therefore 4 = a(0-2)(0+4)$

$\therefore 4 = a(-2)(4)$

$\therefore 4 = -8a.$

$\therefore \frac{4}{-8} = a$

$\therefore -\frac{1}{2} = a$

Vervang nou a met $-\frac{1}{2}$ *en vereenvoudig.*

$\therefore y = -\frac{1}{2}(x-2)(x+4)$

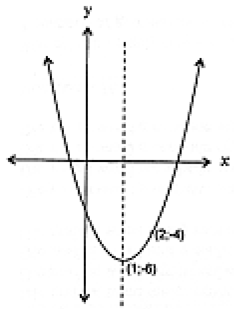
$\therefore y = -\frac{1}{2}(x^2 + 2x - 8)$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$

$\underline{a = -\frac{1}{2},\ b = -1,\ c = 4}$

Voorbeeld 11.

$y = ax^2 + bx + c$. Bereken die waardes van a, b en c.



Die draaipunt word gegee – gebruik dus die vergelyking $\rightarrow y = a(x-p)^2 + q$. (*koördinate van draaipunt is* $(-p;q)$).

$\therefore y = a(x-1)^2 - 6$

$\therefore -4 = a(2-1)^2 - 6$ (*Stel* $(2;-4)$ *in verg.*)

$\therefore -4 = a(1)^2 - 6$

$\therefore -4 + 6 = a$

$\therefore 2 = a$

Vervang nou a met 2 :

$\therefore y = 2(x-1)^2 - 6$

$\therefore y = 2(x^2 - 2x + 1) - 6$

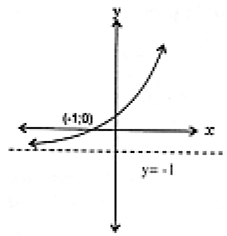
$\therefore y = 2x^2 - 4x + 2 - 6$

$\therefore y = 2x^2 - 4x - 4.$

$\underline{a = 2,\ b = -4,\ c = -4}$

Voorbeeld 12.

$y = 2^{x+p} + q$ Bereken die waardes van p en q.



Horisontale asimptoot : $y = -1$

$\underline{\therefore q = -1}$

Vervang nou q met -1 *en stel* $(-1;0)$ *in.*

$\therefore 0 = 2^{-1+p} - 1$

$\therefore 1 = 2^{-1+p}$

$\therefore 2^0 = 2^{-1+p}$ (*Kry grondtalle gelyk* $2^0 = 1$.)

$\therefore 0 = -1 + p$ (*Grondtalle is gelyk* $\therefore$ *eksponente is gelyk.*)

$\underline{\therefore p = 1}$

FINANSIËLE WISKUNDE .

Die volgende formules word gebruik :

1. Enkelvoudige rente of reguit - lyn depresiasie : $A = P(1 \pm in)$

2. Saamgestelde rente of verminderde - balans depresiasie : $A = P(1 \pm i)^n$

A = Eindbedrag.
P = Beginbedrag of aanvanklike bedrag.
i = Rentekoers.
n = Termyn.

Wanneer rente kwartaalliks saamgestel word, word die rentekoers gedeel deur 4 en die termyn gemaal met 4. Net so, as rente maandeliks saamgestel word, word die rentekoers gedeel deur 12 en die termyn gemaal met 12. Die rentekoers (i) word dus gedeel deur die rentedraende periodes per jaar terwyl die termyn (n) gemaal word met die rentedraende periodes per jaar.

Met enkelvoudige rente kan die eindbedrag, beginbedrag, rentekoers of termyn gevra word. As dit saamgestelde rente is, kan die eindbedrag, beginbedrag of die rentekoers gevra word. Kyk na die volgende voorbeelde :

Voorbeeld 1 :

' n Motor se waarde verminder teen 'n koers van 12% per jaar teen 'n reguitlyn depresiasie. As die motor gekoop word vir R120 000, wat sal die waarde na 5 jaar wees ?

Gegee : Die aankoopprys, die rentekoers en die termyn.
Gevra : Die eindbedrag.

Reguitlyn depresiasie→ waarde verminder ∴gebruik eerste formule met minus.

$$A = P(1 - in)$$
$$\therefore A = 120000\left(1 - \tfrac{12}{100}(5)\right) \quad of \quad A = 120000(1 - 0,12(5))$$
$$\therefore \underline{A = R48\,000} \qquad \therefore \underline{A = R48\,000}$$

Let op : i = rentekoers en dit kan geskryf word as $\frac{i}{100}$ of as 'n desimale breuk. Daarom is $12\% = \frac{12}{100}$ of 0,12. Dit is jou keuse watter een jy wil gebruik.

Voorbeeld 2.

'n Man belê R20 000 teen 10,5% per jaar enkelvoudige rente. Wat sal die waarde van die belegging na 6 jaar wees ?

Gegee: Beginbedrag, rentekoers en termyn. Gevra : Eindbedrag.
Enkelvoudige rente→geld word belê →vermeerdering ∴formule een met plus.

$$A = P(1 + in)$$
$$\therefore A = 20000\left(1 + \tfrac{10,5}{100}(6)\right) \quad of \quad A = 20000(1 + 0,105(6))$$
$$\therefore \underline{A = R32\,600} \qquad \therefore \underline{A = R32\,600}$$

Voorbeeld 3.

'n Man belê 'n bedrag geld teen 12% per jaar enkelvoudige rente. Na 10 jaar is die waarde van die belegging R33 000. Watter bedrag is aanvanklik belê ?

Gegee: Eindbedrag, rentekoers en termyn. Gevra : Beginbedrag.
Enkelvoudige rente∴formule een. Vermeerdering∴plus.

$$A = P(1 + in)$$
$$\therefore 33000 = P[1 + 0,12(10)]$$
$$\therefore \frac{33000}{(1+0,12(10))} = P \qquad [\textit{Om P alleen te kry deel deur } (1 + 0,12(10)).]$$
$$\therefore \underline{P = R15\,000}$$

Voorbeeld 4.

R2 000 word belê teen enkelvoudige rente. Na 5 jaar is die waarde van die belegging R3 200. Wat was die rentekoers ?

Gegee: Beginbedrag, eindbedrag en termyn. Gevra: Rentekoers.
Enkelvoudige rente→vermeerdering∴eerste formule met plus.

$$A = P(1 + in)$$
$$\therefore 3200 = 2000(1 + i(5))$$
$$\therefore \frac{3200}{2000} = 1 + i(5) \qquad (\textit{Deel deur } 2000.)$$

EKSPONENTE EN WORTELVORME.

Belangrik : ken jou wette !

Eksponente:

Wet 1 : $a^m \times a^n = a^{m+n}$ Wet 2 : $a^m \div a^n = a^{m-n}$

Wet 3 : $(a^m)^n = a^{mn}$ Wet 4 : $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Wet 5 : $a^0 = 1$ Wet 6 : $(ab)^n = a^n b^n$

Wortelvorme :

$\sqrt{5} = (5)^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

$\sqrt[3]{8} = (8)^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$ *en* $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{6}$

Onthou, die eksponentwette geld net as die grondtalle dieselfde is en kan ook net gebruik word as alles een term is, m.a.w. as dit maal en deel is. Daarom is dit belangrik om met priemgetalle te werk om grondtalle dieselfde te kry. Ontbind dus dadelik in priemfaktore.

1. **Vereenvoudiging van uitdrukkings wat slegs uit een term bestaan :**

Wanneer die uitdrukking uit slegs een term bestaan (alles is maal en deel), ontbind in priemfaktore en pas eksponentwette toe.

Voorbeeld 1 .

Vereenvoudig :

$$\frac{32^x.6^{x-1}.12^{-x-1}}{16^x.27^{-1}}$$

$= \frac{(2^5)^x.(2.3)^{x-1}.(2^2.3)^{-x-1}}{(2^4)^x.(3^3)^{-1}}$ *(Ontbind in priemfaktore.)*

$= \frac{2^{5x}.2^{x-1}.3^{x-1}.2^{-2x-2}.3^{-x-1}}{2^{4x}.3^{-3}}$ [*Verwyder hakies : bv.* $(2^2)^{-x-1} = 2^{-2x-2}$ (*Wet* 3).]

$= 2^{5x+x-1-2x-2-(4x)}.3^{x-1-x-1-(-3)}$ [*Maal* → *tel eksponente op .*
Deel → *trek eksponente af* (*Wette* 1 *en* 2).]

$= 2^{5x+x-1-2x-2-4x}.3^{x-1-x-1+3}$ [*Vereenvoudig eksponente* → $-(-3) = +3$.]

$= 2^{-3}.3 = \frac{3}{2^3}$ [*Skryf met positiewe eksponente* (*Wet* 4).]

$= \underline{\frac{3}{8}}$

Voorbeeld 2.

Vereenvoudig :

$$\frac{27^{x-2}.3^{x+1}}{81^{x-1}.\frac{1}{3}}$$

$= \frac{(3^3)^{x-2}.3^{x+1}}{(3^4)^{x-1}.3^{-1}}$ [*Ontbind in priemfaktore* → $\frac{1}{3} = 3^{-1}$ (*Wet* 4).]

$= \frac{3^{3x-6}.3^{x+1}}{3^{4x-4}.3^{-1}}$ [*Verwyder hakies* (*Wet* 3).]

$= 3^{3x-6+x+1-(4x-4)-(-1)}$ [*Maal : tel eksponente op.*
Deel : trek eksponente af (*Wette* 1 *en* 2).]

$= 3^{3x-6+x+1-4x+4+1}$

$= 3^0$ $\underline{= 1}$ [*Onthou* $3^0 = 1$ *en nie* 0 *of* 3 *nie* (*Wet* 5).]

2. **Vereenvoudiging van uitdrukkings met meer as een term :**

Sodra daar meer as een term in die uitdrukking voorkom, moet jy faktoriseer. Kyk na die volgende :

1. $3^{x+1} + 3^x$ (*Daar is in elke term 'n gemene faktor* → 3^x.)
$= 3^x(3+1)$ (*Jy deel deur die gemene faktor* → $\frac{3^{x+1}}{3^x} = 3^{x+1-x} = 3$
en $\frac{3^x}{3^x} = 1$.)
$= \underline{4.3^x}$

2. $2.5^{x+1} - 5^{x-1}$ (*Gemene faktor* $= 5^x$.)
$= 5^x(2.5 - 5^{-1})$ ($5^{x+1} \div 5^x = 5$ *en* $5^{x-1} \div 5^x = 5^{-1}$.)
$= 5^x(10 - \frac{1}{5})$ [$5^{-1} = \frac{1}{5}$ (*Wet* 4.)] $= 5^x(\frac{50-1}{5})$ $= \underline{(\frac{49}{5}).5^x}$